

Nonlinear numerical analysis of composite slabs with steel decking

Análise numérica não linear de lajes de concreto com fôrma de aço incorporada

A. R. SILVA ^a

amilton@em.ufop.br

<https://orcid.org/0000-0002-7122-252X>

P. B. SILVA ^a

engpriscilabrandao@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-7412-6728>

Abstract

The composite slabs behavior is governed by longitudinal shear at the interface between the steel deck and concrete, which is developed in slabs under simple bending. The m-k method and the partial connection method, that are used in the evaluation of shear strength at the steel-concrete interface of composite slabs, are based on expensive and long-term experimental tests. The main objective of this work is to implement a finite element model for nonlinear numerical analysis of concrete slabs with steel decking. For this, flat shell elements are implemented, considering Reissner-Mindlin and Kirchhoff plate theories, bar elements, considering the beam theory of Timoshenko, and interface elements. In the numerical analyzes presented in the present work, the steel deck and the concrete slab, of thickness given by the total height of the slab less the height of the steel deck, are modeled with flat shell elements. The concrete rib is modeled with bar elements. The contact between steel deck and concrete is modeled through interface elements. The geometric and material nonlinearities are considered in the numerical analysis. The analyzed examples validate the numerical model suggested in this work, presenting the advantage of using a two-dimensional discretization of the problem while in comparative numerical models are uses a three-dimensional discretization of the concrete slab.

Keywords: composite slabs, flat shell elements, partial connection, longitudinal shear.

Resumo

O comportamento das lajes mistas é governado pelo cisalhamento longitudinal na interface entre o aço e o concreto, que é desenvolvido em lajes sob flexão simples. O método m-k e o método da interação parcial, utilizados no cálculo da resistência ao cisalhamento na interface aço-concreto de lajes mistas, são baseados em ensaios experimentais caros e de longa duração. O objetivo principal desse trabalho é implementar um modelo de elementos finitos para análise numérica não linear de lajes de concreto com fôrma de aço incorporada, para isso são implementados elementos planos de casca, considerando as teorias de placa de Reissner-Mindlin e Kirchhoff, elementos de barra, considerando a teoria de viga de Timoshenko, e elementos de interface. Nas análises numéricas apresentadas nesse trabalho a fôrma de aço e a laje de concreto, de espessura dada pela altura total da laje menos a altura da forma de aço, são modeladas com elementos planos de casca. A nervura de concreto é modelada com elementos de barra. O contato entre a fôrma de aço e o concreto é modelado através de elementos de interface. As não linearidades geométrica e física são consideradas na análise numérica. Os exemplos analisados validam o modelo numérico sugerido neste trabalho apresentando a vantagem de usar uma discretização bidimensional do problema enquanto os modelos numéricos comparativos utilizam uma discretização tridimensional da laje de concreto.

Palavras-chave: lajes mistas, elementos planos de casca, conexão parcial, cisalhamento longitudinal.

^a Universidade Federal de Ouro Preto, Escola de Minas, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Ouro Preto, MG, Brazil.

1. Introdução

As lajes mistas são compostas por uma fôrma de aço perfilada formada a frio, conhecida como *steel deck*, e uma laje de concreto. A chapa de aço deve ser projetada para resistir às cargas de construção e, após o endurecimento do concreto, atuar como parte ou toda a armadura de tração. Já o concreto deve ser projetado para suportar os esforços de compressão e de cisalhamento vertical. Esse sistema estrutural surgiu no final da década de 1930 e se popularizou durante o final da década de 1980 [1]. Segundo Campos [2] as lajes mistas começaram a ser utilizadas no Brasil na década de 1990 e vem se difundindo desde então. O modo de falha mais comum em lajes mistas é a falha por cisalhamento longitudinal na interface entre a fôrma de aço e o concreto. Existem vários fatores que influenciam na resistência ao cisalhamento longitudinal da interface como: as espessuras da chapa de aço e da laje de concreto, o formato dessas chapas de aço, geometria, profundidade e inclinação das mossas e distância entre elas, a forma de carregamento, o tipo de ancoragem nas extremidades da laje e o vão de cisalhamento. Veljkovic [1] afirma que a principal característica do modo de falha devido ao cisalhamento longitudinal é o deslizamento do concreto sobre a chapa de aço que ocorre para um carregamento bem menor que a carga correspondente à resistência à flexão. A NBR 8800 [3] e o EUROCODE 4 [4] recomendam o método *m-k* e o método da interação parcial para a verificação desse modo falha. Esses métodos são dependentes de ensaios experimentais em escala real, que são caros e demorados. Os valores de *m* e *k* são diferentes para cada tipo de fôrma de aço necessitando de ensaios experimentais para cada variação do perfil da chapa de aço [5].

Abdullah e Easterling [6] apresentaram a análise numérica de lajes mistas utilizando o método dos elementos finitos como uma alternativa econômica em relação aos ensaios de flexão em escala real, possibilitando a redução na frequência desses ensaios. Os autores afirmam que a modelagem correta da curva tensão de cisalhamento versus deslizamento na interface aço-concreto é o fator que mais afeta na precisão dos resultados numéricos. Ríos *et al.* [7] apresentaram um método dependente de poucos parâmetros para a modelagem da curva tensão de cisalhamento versus deslizamento. Na maioria dos trabalhos de análise numérica de lajes mistas [7, 8, 9, 10, 11 e 12] os pesquisadores simulam a laje de concreto por elementos finitos tridimensionais, a fôrma de aço por elementos finitos planos de casca, e a conexão usando elementos de ligação. Nesse trabalho são utilizados apenas elementos planos de casca, elementos de barra e interface, proporcionando uma análise de menor custo computacional comparada àquela que utiliza de dis-

cretização tridimensional da parte de concreto da laje mista.

No trabalho de Ferrer *et al.* [13], um novo tipo de lajes mistas foi desenvolvido. Os autores sugeriram alterar as fôrmas de aço trapezoidais, substituindo as mossas por furos nas partes inclinadas das fôrmas de aço. Os resultados obtidos mostraram que esse tipo de ligação é equivalente à conexão total entre os materiais, pois a ruptura das lajes ocorreu com a plastificação total das seções.

Neste trabalho para a consideração da não linearidade física o elemento plano de casca é subdividido em camadas as quais são consideradas em estado plano de tensões e podem ter características mecânicas distintas. Para o caso do elemento plano de casca em concreto armado as barras de aço são consideradas como camadas de aço equivalentes com rigidez apenas na direção das barras. Esse modelo não linear físico para o elemento plano de casca de concreto tem sido utilizado por alguns pesquisadores [14, 15, 16 e 17].

Na formulação do elemento plano de casca são consideradas as teorias de placa de Reissner-Mindlin e Kirchhoff. A teoria de Reissner-Mindlin pode gerar erros numéricos na análise de placas delgadas com baixa discretização devido a não compatibilidade das funções de forma na avaliação da deformação por cisalhamento, que nesses casos tende ser muito pequena. Esse travamento por cisalhamento não é verificado na teoria de placa de Kirchhoff, no entanto, a formulação para essa teoria é um pouco mais complexa uma vez que as rotações são associadas às derivadas do deslocamento perpendicular ao plano da placa. Detalhes de algumas formulações de elemento plano de casca considerando teoria de placas de Kirchhoff podem ser encontrados nos trabalhos de Batoz *et al.* [18], Batoz e Tahar [19], Sarawit *et al.* [20], e Razaqpur *et al.* [21].

2. Comportamento da ligação fôrma de aço com a laje de concreto

O comportamento da interface de contato entre a fôrma de aço e o concreto de lajes mistas tem sido estudado extensivamente. A partir dos ensaios experimentais *pull-out test*, *push-off test* e ensaio de flexão, são obtidos os dados necessários para gerar curvas que relacionam o deslizamento longitudinal com a tensão de cisalhamento [22].

De acordo com Abdullah e Easterling [6] o principal problema do *pull-out test* e *push-off test* é que, devido à sua natureza, não capturam os efeitos da curvatura devido à flexão da laje e da razão entre o comprimento do vão de cisalhamento e a espessura efetiva do concreto. Por isso é sugerido o ensaio de flexão mostrado na Figura 1 que consiste na aplicação de duas cargas simétricas

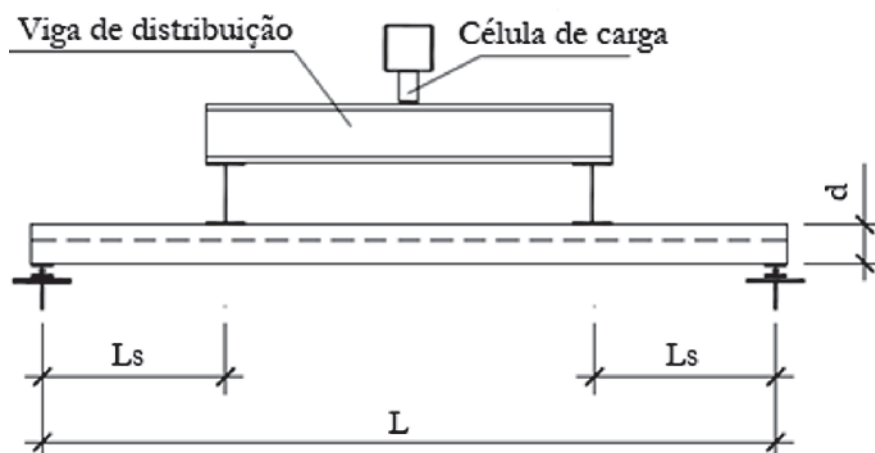


Figura 1
Esquema do ensaio de flexão (adaptado de [9])

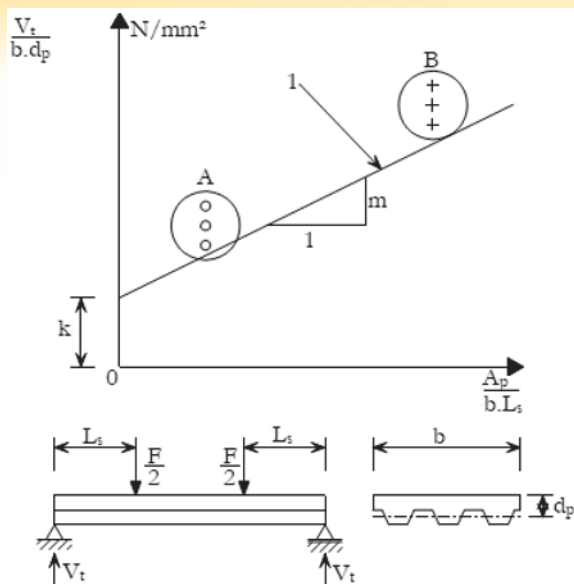


Figura 2
Determinação dos parâmetros m e k [3]

em relação aos apoios da laje mista submetendo-a a flexão pura e simples. Como resultado desse ensaio experimental determina-se os parâmetros m e k utilizados para determinar a força cortante longitudinal resistente de cálculo (Eq. 1) de lajes mistas utilizando a fôrma de aço estudada. Na Eq. 1, d_p é a distância da face superior da laje de concreto ao centro geométrico da seção efetiva da fôrma, b é a largura unitária da laje, L_s é o vão de cisalhamento e A_s é a área da seção efetiva da fôrma.

$$V = b d_p \left[\left(\frac{m A_s}{b L_s} \right) + k \right] \quad (1)$$

No método m - k a Eq. 1 é reescrita na forma de uma equação linear com m o coeficiente angular e k o coeficiente linear [23]. Com essa consideração, para cada modelo de fôrma de aço são analisados dois grupos de três ensaios, indicados na Figura 2 pelas regiões A e B. Os dois grupos são definidos de forma que se tenha um grupo de lajes mistas compactas e outro grupo de lajes mistas esbeltas. Com os valores obtidos dos ensaios, é feita uma regressão linear através do método dos mínimos quadrados obtendo-se os parâmetros m e k , como mostrado na Figura 2.

Veljkovic [1] e Abdullah e Easterling [8] utilizaram o ensaio de

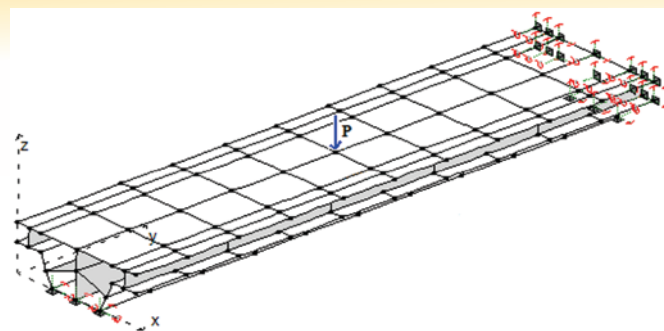


Figura 3
Modelo de laje mista implementada

flexão para o estudo de mecanismos que influenciam na transferência do cisalhamento longitudinal em lajes mistas. Ferrer *et al.* [24] usaram uma metodologia para a modelagem não linear tridimensional dos *pull-out test* para simular o comportamento do deslizamento no contato considerando-o com fricção. Concluiu-se que os parâmetros que apresentaram uma maior influência na resistência ao deslizamento são a inclinação transversal das mochas, a espessura da chapa de aço e as condições da superfície de fricção. Já outros trabalhos [25, 26 e 27] tem mostrado que a ancoragem das extremidades das lajes mistas melhora o seu comportamento estrutural.

3. Implementação computacional

É apresentado na Figura 3 a discretização de uma laje mista em elementos finitos planos de casca, elementos de barra e elementos de interface. Nessa figura a laje mista tem apoios simples nas extremidades perpendiculares à direção das nervuras e é livre no restante de seu contorno. Dessa forma, a laje mista tende a flexionar apenas no plano yz da figura. Devido a isso, juntamente com a simetria das condições de apoio e carregamento, é simulado apenas uma nervura da laje mista e metade do seu vão.

Na Figura 4 são detalhados os elementos utilizados na discretização da laje mista. Para modelar a interface aço-concreto são utilizados dois elementos de interface, um que conecta dois elementos planos de casca e outro que conecta elemento de barra a casca. No caso do elemento de interface que conecta a nervura de concreto à laje de concreto acima da nervura não existe um plano de deslizamento nessa interface sendo atribuído à rigidez da conexão um valor elevado. Nos itens seguintes são apresentadas as formulações dos elementos utilizados na simulação numérica de lajes mistas.

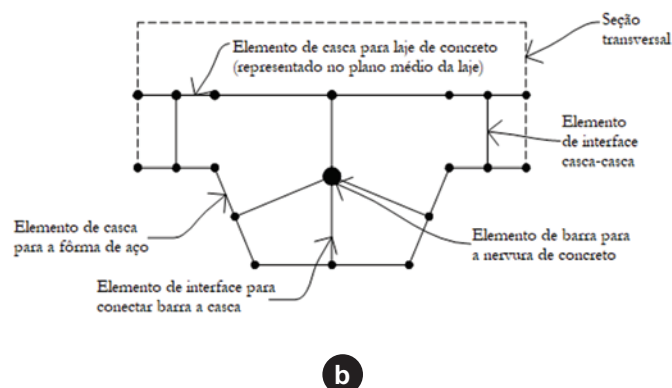
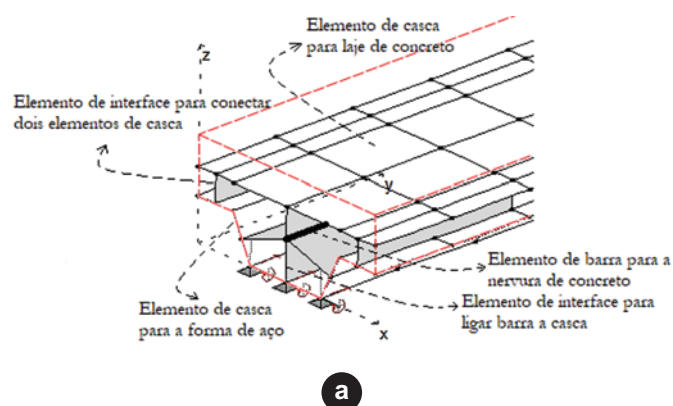


Figura 4
Representação dos elementos utilizados: (a) vista em perspectiva, (b) vista do plano xz

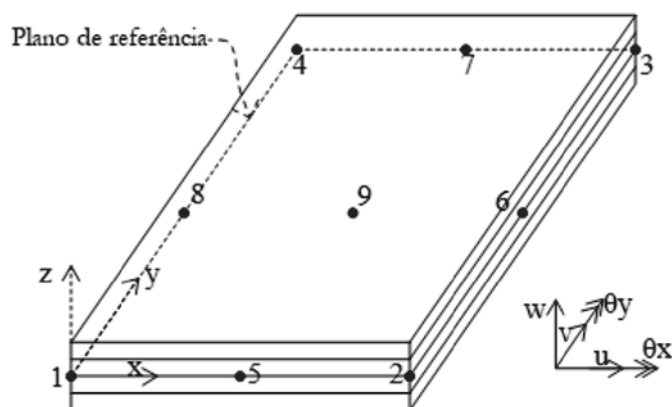


Figura 5
Elemento plano de casca de nove nós dividido em camadas

Maiores detalhes das formulações podem ser obtidas nas referências [28 e 29].

3.1 Elemento plano de casca espesso

O elemento finito plano de casca espesso implementado para a análise não linear de lajes mistas possui nove nós e cinco graus de liberdade por nó a nível local, como mostra a Figura 5. A não linearidade física é considerada dividindo a seção em várias camadas, para isso são utilizadas as considerações utilizadas por Huang *et al.* [17], que são: (i) Os elementos são compostos por camadas de aço ou de concreto, sendo impedido o deslizamento entre as camadas; (ii) Cada camada pode possuir propriedades mecânicas diferentes e relações tensão-deformação independentes; (iii) As barras de reforço são consideradas como uma camada equivalente de aço com rigidez apenas na direção da barra; (iv) As camadas de concreto estão em estado plano de tensões e o concreto é considerado ortotrópico após a fissuração.

De acordo com as hipóteses cinemáticas da teoria de placas de Reissner-Mindlin um ponto no domínio do elemento de placa pode se deslocar de acordo com as Equações 2 a 4. Nessas equações u^0 , v^0 e w^0 representam as translações do plano de referência do elemento plano de casca nas direções x , y e z . θ_x e θ_y são as rotações das seções em relação aos eixos x e y . E z é a posição da fibra em relação à superfície média ao longo da espessura do elemento plano de casca onde se deseja avaliar os deslocamentos. Para facilitar a notação, o sobrescrito zero será omitido nas equações seguintes.

$$u(x, y, z) = u^0(x, y) + z\theta_y(x, y) \quad (2)$$

$$v(x, y, z) = v^0(x, y) - z\theta_x(x, y) \quad (3)$$

$$w(x, y, z) = w^0(x, y) \quad (4)$$

Aplicando as Equações 2 a 4 a relação deformação-deslocamento

de Green-Lagrange $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})$ e desprezando

a variação de w com z , hipóteses de Von Karman, obtêm-se as

equações das deformações que terão relação não linear com os deslocamentos (não linearidade geométrica).

As relações tensão-deformação para o concreto usada nesse trabalho são os modelos definidos pelo Comitê Europeu de Concreto [30]. Para o comportamento do concreto após a fissuração adotou-se um modelo bi-linear para a degradação do módulo de elasticidade semelhante ao sugerido por Rots *et al.* [31] e usado também por Huang *et al.* [17]. No caso de concreto armado, o aço das barras de reforço é considerado elástico perfeitamente plástico.

Para a análise não linear do problema é utilizado neste trabalho um método incremental com controle de deslocamento. No método utilizado é adotado um tamanho de passo pequeno sendo feita a cada passo uma correção na matriz de rigidez através do cálculo da tangente média [28]. Nos incrementos de deslocamentos desse método é considerado material linear com módulo de elasticidade dado pela tangente à curva tensão-deformação e válida a relação constitutiva da lei de Hooke para o problema analisado. O concreto apresenta comportamento ortotrópico após a fissuração ou esmagamento. Considerando as camadas em estado plano de tensões são definidas as direções principais indicadas neste trabalho pelos subscritos 1 e 2. Se as deformações principais (ε_1 e ε_2) estiverem dentro da região de falha, o concreto é considerado ortotrópico com a relação tensão-deformação desacoplada para as direções principais como apresentada pela matriz constitutiva dada pela Eq. 5.

$$D_{12} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & E_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{2}(G_1 + G_2) & 0 & 0 \\ & & & G_1 & 0 \\ Sim. & & & & G_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Na Equação anterior, E_1 e E_2 são dados pelas tangentes da curva tensão-deformação do concreto nos pontos $\varepsilon = \varepsilon_1$ e $\varepsilon = \varepsilon_2$, respectivamente. Já, $G_1 = 0,5 E_1 / (1 + \nu)$ e $G_2 = 0,5 E_2 / (1 + \nu)$. Sendo ϕ o ângulo de rotação dos eixos principais em relação aos eixos x e y a matriz de rigidez na direção dos eixos ortogonais x e y pode ser obtida a partir de D_{12} .

$$D_{xy} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 \\ & & & D_{44} & D_{45} \\ Sim. & & & & D_{55} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Na Eq. 6,

$$D_{11} = E_1 \cos^4 \phi + E_2 \sin^4 \phi + \frac{1}{2}(G_1 + G_2) \sin^2(2\phi),$$

$$D_{12} = \frac{1}{4} \sin^2(2\phi)(E_1 + E_2 - 4(G_1 + G_2)),$$

$$D_{13} = \frac{1}{2} \sin^2 \phi (E_1 \cos^2 \phi - E_2 \sin^2 \phi - (G_1 + G_2) \cos(2\phi)),$$

$$D_{22} = E_1 \sin^4 \phi + E_2 \cos^4 \phi + \frac{1}{2}(G_1 + G_2) \sin^2(2\phi),$$

$$D_{23} = \frac{1}{2} \sin^2 \phi (E_1 \sin^2 \phi - E_2 \cos^2 \phi + (G_1 + G_2) \cos(2\phi)),$$

$$D_{33} = \frac{1}{4} \sin^2(2\phi)(E_1 + E_2) + \frac{1}{2}(G_1 + G_2) \cos^2(2\phi),$$

$$D_{44} = G_1 \cos^2 \phi + G_2 \sin^2 \phi,$$

$$D_{45} = \frac{1}{2}(G_1 - G_2) \sin(2\phi) \text{ e } D_{55} = G_1 \sin^2 \phi + G_2 \cos^2 \phi.$$

Para o caso particular de material isotrópico, observado quando as deformações principais estiverem fora da região de falha do concreto, tem-se $E_1 = E_2 = E$, $G_1 = G_2 = G$ e a matriz $\mathbf{D}_{xy}$ da Eq. 6 reduz a forma tradicional da matriz constitutiva da lei generalizada de Hooke para o problema em questão.

A partir de um campo de deformações virtual compatível ao elemento plano de casca e aplicando o princípio dos trabalhos virtuais chega-se ao vetor de forças internas dado pela equação a seguir.

$$\mathbf{f}_{int} = \iint_A \begin{bmatrix} N_x \Phi_{,x} + N_{xy} \Phi_{,y} \\ N_{xy} \Phi_{,x} + N_y \Phi_{,y} \\ Q_{xz} \Phi_{,x} + Q_{yz} \Phi_{,y} + w_{,x} N_x \Phi_{,x} + w_{,y} N_y \Phi_{,y} + N_{xy} (w_{,y} \Phi_{,x} + w_{,x} \Phi_{,y}) \\ -M_{xy} \Phi_{,x} - M_x \Phi_{,y} - Q_{yz} \Phi \\ M_y \Phi_{,x} + M_{xy} \Phi_{,y} + Q_{xz} \Phi \end{bmatrix} dA \quad (7)$$

Na Eq. 7, N_x , N_y , N_{xy} , Q_{xz} , Q_{yz} , M_x , M_y e M_{xy} são escalares dados pelos esforços por unidade de comprimento obtido a partir da integral ao longo da espessura das tensões normais e cisalhante na seção ortogonal.

Como a teoria de placa de Reissner-Mindlin é utilizada nessa formulação, os deslocamentos de translações e rotações podem ser interpolados independentemente, dessa forma, as funções de interpolação para o elemento são dadas por polinômios biquadráticos (N_i , $i = 1, \dots, 9$) em relação às coordenadas paramétricas. O termo Φ na Eq. 7 é um vetor de nove termos formado por esses polinômios. Para a resolução do problema não linear de equilíbrio $\mathbf{f}_{int} - \mathbf{f}_{ext} = 0$, é utilizado o método de Newton-Raphson, logo a matriz de rigidez tangente deve ser obtida. Sendo $\mathbf{f}_{ext}$ constante em relação aos deslocamentos nodais, a matriz de rigidez tangente

é dada por, $\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}_{int}}{\partial \mathbf{q}}$.

$$\mathbf{K} = \iint_A \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,x} \Psi_1 + \Phi_{,y} \Psi_2 \\ -\Phi_{,x} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi_{,y} \left(\frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi \left(\frac{\partial Q_{yz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi \left(\frac{\partial Q_{xz}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{bmatrix} dA \quad (8)$$

Na Eq. 8, $\mathbf{q}$ é um vetor coluna com 45 termos representando os deslocamentos nodais do elemento plano de casca, Ψ_1 e Ψ_2 são vetores colunas com 45 termos como mostrado nas expressões a seguir.

$$\Psi_1 = \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} N_x + \frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} w_{,x} \right)^T + \left(\frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} w_{,y} \right)^T$$

$$\Psi_2 = \left(\frac{\partial w_{,y}}{\partial \mathbf{q}} N_y + \frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} w_{,y} \right)^T + \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial \mathbf{q}} N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} w_{,x} \right)^T$$

3.2 Elemento plano de casca fino

O elemento finito implementado para a análise de cascas planas finas é o elemento retangular de quatro nós com cinco graus de

liberdade por nó, três translações e duas rotações. É baseado no elemento apresentado por Razaqpur *et al.* [21], denominado IDKQ e desenvolvido a partir das hipóteses discretas de Kirchhoff. Diferente do elemento de Razaqpur, o elemento implementado neste trabalho tem os graus de liberdade de translação nas direções x e y , já que a análise não linear e ação conjunta da laje de concreto e a fôrma de aço não permitem conhecer a posição do plano neutro para o qual esses deslocamentos são nulos.

O elemento de quatro nós para análise de cascas planas finas é desenvolvido a partir do elemento plano de casca espesso do item anterior com a eliminação do grau de liberdade de translação vertical. A formulação é desenvolvida para o elemento de nove nós e os deslocamentos encontrados são transformados para o elemento de quatro nós através de uma matriz de transformação. Assim como para o elemento plano de casca espesso (item 3.1), as equações dos deslocamentos para o elemento de casca fino são dadas pelas Eq. 2 a 4. Admitindo agora que $\theta_x = w_{,y}$ e $\theta_y = w_{,x}$, tem-se que $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$, e as demais deformações são dadas pelas equações 9 a 11. Observa-se dessas equações que o deslocamento transversal não é mais incógnita explícita do problema, sendo essa a única diferença nas formulações nessa primeira parte.

$$\epsilon_x = u_{,x} + z\theta_{y,x} + \frac{1}{2}\theta_y^2 \quad (9)$$

$$\epsilon_y = v_{,y} + z\theta_{x,y} + \frac{1}{2}\theta_x^2 \quad (10)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}(u_{,y} + z\theta_{y,y} + v_{,x} - z\theta_{x,x} - \theta_y\theta_x) \quad (11)$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio do item 3.1 para obter a formulação fraca do trabalho virtual interno e igualando ao trabalho virtual externo chega-se ao vetor de forças internas para o elemento plano de casca fino dado pela equação a seguir.

$$\mathbf{f}_{int} = \iint_A \begin{bmatrix} N_x \Phi_{,x} + N_{xy} \Phi_{,y} \\ N_{xy} \Phi_{,x} + N_y \Phi_{,y} \\ -M_{xy} \Phi_{,x} - M_x \Phi_{,y} + \theta_x N_y \Phi - \theta_y N_{xy} \Phi \\ M_y \Phi_{,x} + M_{xy} \Phi_{,y} + \theta_y N_x \Phi - \theta_x N_{xy} \Phi \end{bmatrix} dA \quad (12)$$

Diferente do item 3.1, o vetor Φ que representa as funções de forma avaliadas em um determinado ponto tem 36 termos, uma vez que, os graus de liberdade referentes ao deslocamento vertical não estão sendo considerados nessa formulação. No entanto, para os outros graus de liberdades as funções de forma são as mesmas do item 3.1. Análogo ao item 3.1, a matriz de rigidez tangente é dada pela derivada do vetor de forças internas em relação aos deslocamentos nodais.

$$\mathbf{K} = \iint_A \begin{bmatrix} \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial N_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi_{,x} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \Phi_{,y} \left(\frac{\partial M_x}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Psi_1 \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial M_y}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{,y} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Psi_2 \end{bmatrix} dA \quad (13)$$

A formulação do elemento plano de casca fino desenvolvida nesse item até aqui, é baseada na formulação do elemento plano de

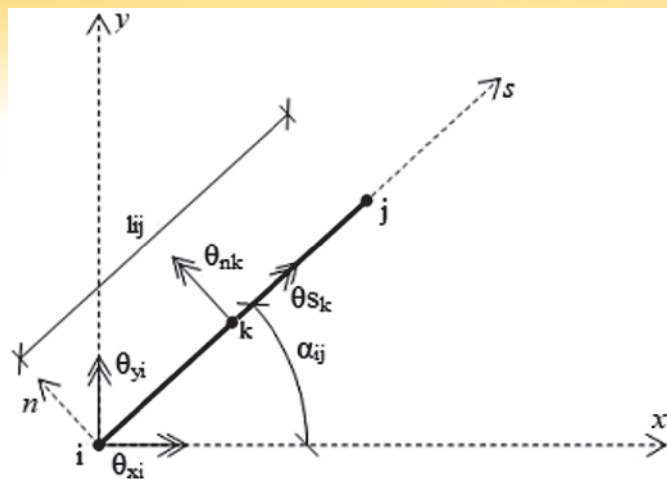


Figura 6
Coordenadas do lado do elemento
(adaptado de [21])

casca espesso do item 3.1. As hipóteses de Kirchhoff são forçadas fazendo os graus de liberdade de rotação ser iguais às derivadas do deslocamento vertical, e, dessa forma, anulando as tensões cisalhantes. No entanto a formulação obtida não consegue ser utilizada porque suas funções de forma consideram independência das rotações em x e y , o que na teoria de Kirchhoff não acontece. Razaqpur *et al.* [21] definiram uma matriz de transformação que altera a formulação obtida até aqui em uma formulação consistente para um elemento plano de casca fino de quatro nós. Essa matriz de transformação é apresentada a seguir, e diferente de Razaqpur nesse artigo é considerado o efeito de membrana.

Para escrever os deslocamentos do elemento de quatro nós é necessário fazer uma conversão através de uma matriz de transformação ($T_{n \times m}$), de forma que: $q = T_{n \times m} p$. Onde, n é o número de graus de liberdade do elemento de 9 nós, m é o número de graus de liberdade do elemento de 4 nós,

$q^T = \{u_1 \dots u_9 \ v_1 \dots v_9 \ \theta_{x1} \dots \theta_{x9} \ \theta_{y1} \dots \theta_{y9}\}$, e
 $p^T = \{u_1 \dots u_4 \ v_1 \dots v_4 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \dots w_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4}\}$.

É mostrado na Figura 6 um lado do elemento quadrilátero de nove nós. Utilizando de uma função de interpolação que associa o deslocamento vertical ao longo do eixo $i-j$ e a sua derivada em relação à variável ao longo desse eixo, pode-se relacionar o deslocamento vertical e as suas derivadas nos nós i e j com as rotações do elemento de nove nós.

Para as direções u e v , os deslocamentos dos vértices do elemento de nove nós são iguais aos deslocamentos dos vértices do elemento de quatro nós. Para os nós centrais de cada lado do elemento de nove nós os deslocamentos u e v são calculados pela média dos deslocamentos dos nós dos vértices do elemento de quatro nós. Ou seja, $u_k = (u_i + u_j)/2$. Para o nó 9, nó interior do elemento quadrilátero, os deslocamentos u e v são calculados pelas médias dos deslocamentos dos nós centrais do contorno do ele-

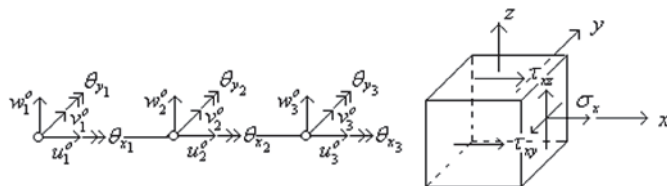


Figura 7
Graus de liberdade do elemento de viga
e tensões em um elemento infinitesimal

mento, onde esses foram calculados usando a média dos nós dos vértices do elemento, dessa forma, tem-se: $u_9 = (u_1 + u_2 + u_3 + u_4)/4$ e $v_9 = (v_1 + v_2 + v_3 + v_4)/4$. Nesse parágrafo, o sobrescrito * indica deslocamentos no elemento de quatro nós, ou seja, termos do vetor p . Obtida $T_{n \times m}$, a matriz de rigidez tangente para o elemento de quatro nós é dada por $K_{n \times m}^* = T_{n \times m}^T K_{m \times m} T_{n \times m}$. Onde, $K_{m \times m}$ é a matriz de rigidez do elemento de 9 nós dada pela Eq. 13. A matriz de transformação $T_{n \times m}$ necessária para transformar a matriz de rigidez do elemento de 9 nós para o elemento de 4 nós possui 36 linhas e 20 colunas.

3.3 Elemento de barra

Na simulação numérica da laje mista as nervuras de concreto são simuladas por elementos de barra. Na Figura 7 são apresentados os graus de liberdade considerados na implementação do elemento de barra e as tensões que surgem em um elemento infinitesimal da barra. Observa-se dessa figura que os graus de liberdade do elemento de barra são os mesmos adotados para o elemento plano de casca. Considerando as hipóteses cinemáticas da teoria de viga de Timoshenko e a aproximação de que um esforço de torção não provoca deslocamentos fora do plano de torção, definem-se as equações de deslocamento a seguir.

$$u(x, y, z) = u^0(x) + z\theta_y(x) \quad (14)$$

$$v(x, y, z) = v^0(x) - z\theta_x(x) \quad (15)$$

$$w(x, y, z) = w^0(x) + y\theta_x(x) \quad (16)$$

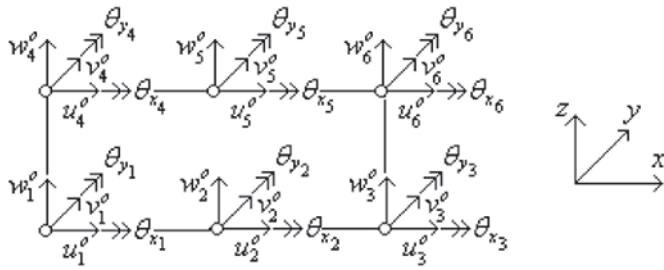
Definindo os esforços internos na seção transversal do elemento de barra $N_x = \int_A \sigma_x dA$, $N_{xy} = \int_A \tau_{xy} dA$, $N_{xz} = \int_A \tau_{xz} dA$, $M_x = \int_A \sigma_x z dA$ e $T_x = \int_A (\tau_{xz} y - T_{xy} z) dA$, e aproximando as equações dos deslocamentos por funções de formas associadas aos deslocamentos nodais, chega-se a Eq.17 e 18, respectivamente, para a formulação fraca do trabalho virtual interno e da matriz de rigidez tangente. Nessas equações, Φ é um vetor que representa as funções de forma dadas por polinômios quadráticos para os deslocamentos axiais, transversais e rotações, $q = [u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi}]^T$ com i variando de 1 até 3 (número de nós do elemento de barra) representa os graus de liberdade do elemento de barra.

$$f_{int} = \int_L \left\{ \begin{array}{l} N_x \Phi_{,x} \\ N_{xy} \Phi_{,x} \\ \frac{5}{6} N_{xz} \Phi_{,x} + N_x \Phi_{,x} w_{,x} \\ T_x \Phi_{,x} \\ M_x \Phi_{,x} + \frac{5}{6} N_{xz} \Phi \end{array} \right\} dx \quad (17)$$

$$K = \int_L \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial q} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial q} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial N_{xz}}{\partial q} \right)^T + \Phi_{,x} w_{,x} \left(\frac{\partial N_x}{\partial q} \right)^T + N_x \Phi_{,x} \left(\frac{\partial w_{,x}}{\partial q} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial T_x}{\partial q} \right)^T \\ \Phi_{,x} \left(\frac{\partial M_x}{\partial q} \right)^T + \Phi \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial q} \right)^T \end{array} \right\} dx \quad (18)$$

3.4 Elemento de interface

Para a simulação da conexão deformável entre a laje de concreto e a fôrma de aço é utilizado o elemento de interface mostrado na Figura 8. Esse elemento tem a função de ligar o elemento de barra que representa a nervura de concreto aos elementos planos de

**Figura 8**

Graus de liberdade do elemento de interface [29]

casca de concreto e aço. O elemento de interface utilizado para ligar elementos planos de casca de concreto aos elementos planos de casca de aço é similar a esse. Para maiores detalhes desses elementos consultar a referência [29].

Sendo $u_\alpha(x, y, z) = u_\alpha^0(x) + z\theta_{y\alpha}(x)$ e $v_\alpha(x, y, z) = v_\alpha^0(x) - z\theta_{x\alpha}(x)$ as equações dos deslocamentos na direção x e y para os elementos acima ($\alpha = 1$) e abaixo ($\alpha = 2$) da interface de contato, e considerando $w_\alpha(x, y, z) = w_\alpha^0(x) + y\theta_{x\alpha}(x)$ como a equação dos deslocamentos na direção z , tem-se as Equações 19 a 21 para os deslocamentos relativos longitudinal (direção x), transversal (direção y), e vertical (direção z) do elemento de interface da Figura 8.

$$s_l(x) = u_2^0(x) - u_1^0(x) - (y_2 - d)\theta_{y2}(x) - (d - y_1)\theta_{y1}(x) \quad (19)$$

$$s_t(x) = v_2^0(x) - v_1^0(x) + (y_2 - d)\theta_{x2}(x) + (d - y_1)\theta_{x1}(x) \quad (20)$$

$$s_v(x) = w_2^0(x) - w_1^0(x) + y(\theta_{x2}(x) - \theta_{x1}(x)) \quad (21)$$

São ilustrados na Figura 9 o deslocamento relativo na direção x , e as variáveis que aparecem nas Equações 19 a 21, d , y_1 e y_2 . O sobrescrito 0 nessas equações indica deslocamento em um plano ou um eixo de referência adotado. Este índice será omitido nas equações a seguir para facilitar a notação.

Definindo S_b , V_b e N_b forças por unidade de comprimento na direção de u , v e w , respectivamente, b a largura do contato representado pelo elemento de interface, então S_b/b fornece a tensão cisalhante na direção longitudinal do contato. Sendo $N_b^1 = \int_b N_b dy$ e $N_b^2 = \int_b N_b dy$, Φ um vetor onde seus termos são funções de

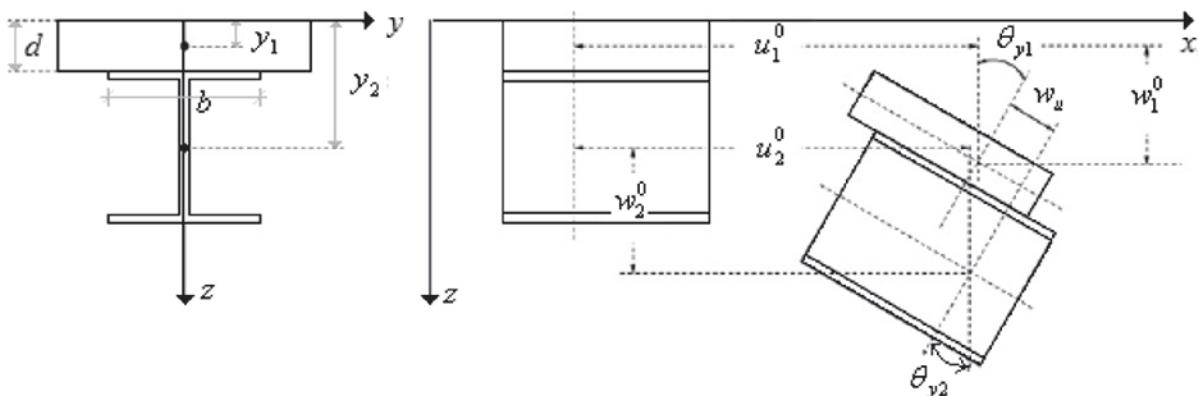
forma dadas por polinômios quadráticos, $\mathbf{q}$ vetor dos deslocamentos nodais, tem-se a Eq. 22 e 23 para o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente do elemento de interface.

$$\mathbf{f}_{int} = \int_L \begin{Bmatrix} -S_b \Phi \\ -V_b \Phi \\ -N_b^1 \Phi \\ [(d - y_1)V_b - N_b^2] \Phi \\ (y_1 - d)S_b \Phi \\ S_b \Phi \\ V_b \Phi \\ N_b^1 \Phi \\ [(y_2 - d)V_b + N_b^2] \Phi \\ (d - y_2)S_b \Phi \end{Bmatrix} dx \quad (22)$$

$$\mathbf{K} = \int_L \begin{Bmatrix} -\Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ -\Phi \left(\frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left[(d - y_1) \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ (y_1 - d) \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left(\frac{\partial N_b^1}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \\ \Phi \left[(y_2 - d) \left(\frac{\partial V_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \frac{\partial N_b^2}{\partial \mathbf{q}} \right] \\ (d - y_2) \Phi \left(\frac{\partial S_b}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \end{Bmatrix} dx \quad (23)$$

4. Análises numéricas

Para a validação do modelo de análise e os elementos finitos

**Figura 9**

Deslizamento longitudinal

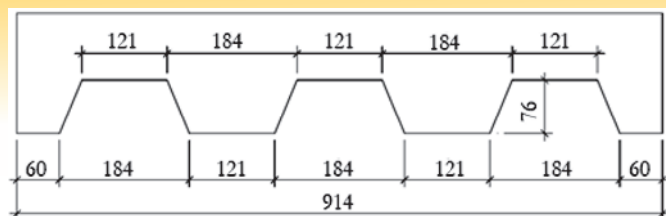


Figura 10
Geometria da fôrma [9] (dimensões em mm)

sugeridos neste artigo são utilizados resultados numéricos e experimentais encontrados na literatura. Sendo apresentados aqui três desses exemplos analisados.

4.1 Exemplo 1: ensaio de flexão

Nesse exemplo é feita a modelagem de um ensaio de flexão típico de lajes mistas como o indicado na Figura 1. A laje desse exemplo foi estudada experimentalmente por Chen [25] e analisada numericamente por Chen e Shi [9]. São realizadas duas análises, sendo que na primeira análise são usados dois elementos planos de casca finos, um para modelar a fôrma de aço e outro para a laje de concreto acima da nervura, como mostrado na Figura 4. Na segunda análise o elemento plano de casca espesso é utilizado para modelar a laje de concreto acima da nervura e o elemento plano de casca fino para modelar a fôrma de aço. Em ambas análises a nervura é simulada pelo elemento de barra e a ligação entre os diferentes elementos e a simulação da conexão deformável é feita pelos elementos de interface casca/casca e barra/casca.

A laje possui 0,914 m de largura, 2,6 m de comprimento e duas cargas são aplicadas seguindo o indicado para o ensaio de flexão (mostrado na Figura 1), com vão de cisalhamento de 0,65 m. A espessura total de concreto é 165 mm. Na Figura 10 é apresentado um detalhe da fôrma de aço que possui espessura de 0,9 mm. Na Figura 11 é apresentada a discretização da laje mista, para uma melhor visualização os elementos de interface são apresentados na cor cinza. Para a caracterização dos materiais foram utilizadas as curvas tensão-deformação descritas nas formulações dos elementos, sendo para o concreto adotado módulo de elasticidade $E_c = 27133$ MPa, resistência à compressão $f_c = 20,1$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. Já para a fôrma de aço tem-se o módulo de elasticidade $E_s = 210000$ MPa, tensão de escoamento $f_y = 275$ MPa, e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Como é mostrado na Figura 11, devido à simetria em relação ao plano yz e ao fato de que a laje é formada pela união de várias seções transversais como a indicada na referida figura, apenas uma nervura e metade do vão da laje mista é discretizado. Ainda na Figura 11 são indicadas as condições de apoio e a posição de aplicação da carga. Os três nós marcados na extremidade esquerda, tem os deslocamentos de translação ao longo do eixo

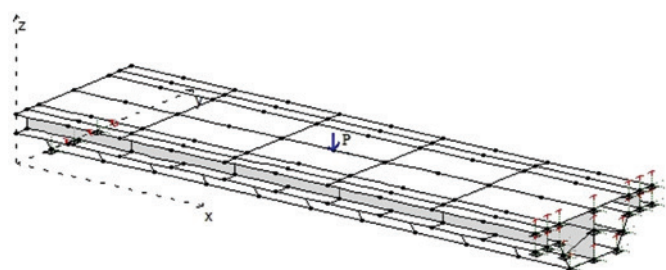


Figura 11
Discretização da laje mista

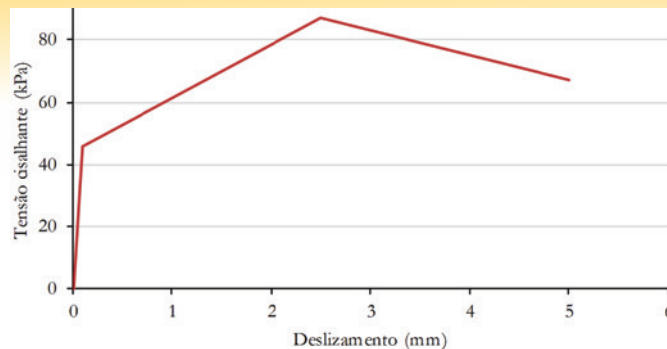


Figura 12
Curva tensão cisalhante x deslizamento

x e rotação em y liberados. Os da extremidade direita têm apenas a translação em z livre.

A conexão entre o aço e o concreto foi modelada pelos elementos de interface que apresentam três rigidezes, longitudinal, transversal e vertical. Como a falha em lajes mistas ocorre devido ao cisalhamento longitudinal as possibilidades de separação vertical e deslizamento transversal são desconsideradas. Dessa forma, uma curva linear que representa conexão total, ou seja, rigidez elevada $E = 10^6$ MPa é utilizada para representar o contato no sentido transversal e vertical. Para a rigidez longitudinal utilizou-se os resultados experimentais de Chen [9] da curva carga-deslizamento longitudinal da laje mista, para definir a curva tensão cisalhante versus deslizamento longitudinal no contato aço-concreto da laje mista. Admite-se para essa curva uma função definida por sentenças, onde cada sentença é dada pela equação de uma reta. Os limites de cada intervalo da sentença bem como dos coeficientes linear e angular da equação da reta são definidos de forma que a resposta numérica e experimental carga-deslizamento para a laje mista sejam bastante próximas, essa curva é apresentada na Figura 12.

Os resultados numéricos de Chen e Shi [9] foram obtidos com o programa comercial ANSYS onde, a fôrma de aço foi discretizada com elementos de casca, a laje de concreto com elementos sólidos, e a conexão deformável foi modelada por um par de elementos de contato, considerando adesão e fricção. Nas Figuras 13 e 14 são ilustrados os resultados numéricos obtidos nesse trabalho, o resultado numérico de Chen e Shi [9] e o resultado do modelo experimental de Chen [25]. O rótulo (casca4) refere-se à análise que utiliza apenas o elemento plano de casca fino e o rótulo (casca9+casca4) à análise que utiliza os dois elementos.

Na Figura 13 é apresentado o comportamento da deflexão no meio

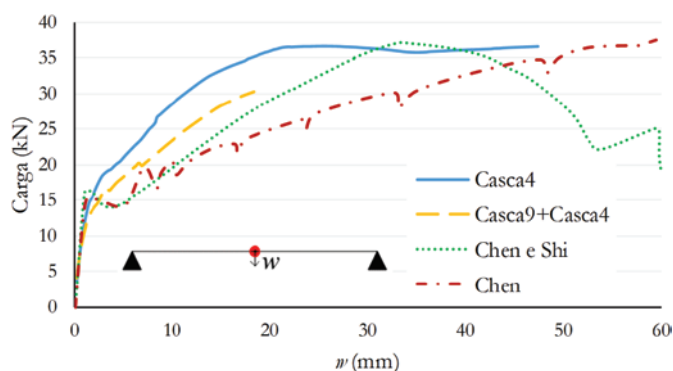


Figura 13
Carga x Deflexão no meio do vão

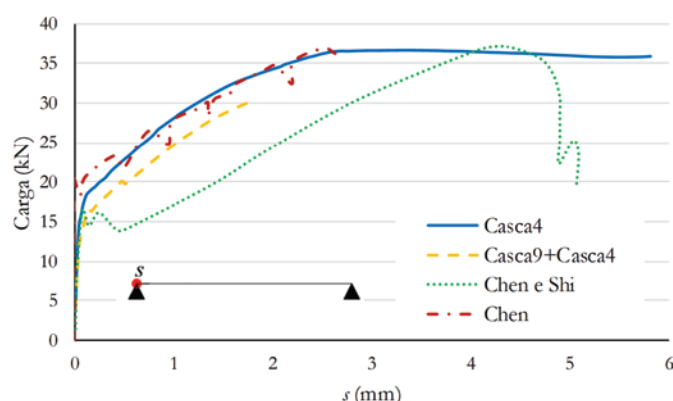


Figura 14
Carga x Deslizamento na extremidade

do vão da laje mista em relação à carga aplicada. Nota-se que nas duas análises o comportamento obtido para a fase linear, em que há a interação total entre o aço e o concreto, foi semelhante ao comportamento experimental. Com o início do comportamento não linear, há um distanciamento entre o comportamento experimental e o encontrado com os modelos numéricos. Essa diferença se deve à complexidade da simulação numérica do concreto após fissuração e da grande quantidade de fatores que influenciam no comportamento do contato em lajes mistas, como, por exemplo, efeitos localizados nas mossas. No entanto, em termos de carga última, a resposta numérica utilizando apenas os elementos de casca plano fino (Casca4), e a resposta numérica de Chen, apresentam valores próximos ao resultado experimental. A análise (Casca9+Casca4) apresenta um valor um pouco menor, o que pode ser explicado pela diferença nas formulações dos elementos Casca9 e Casca4, já que o elemento Casca9 pode apresentar o efeito *shear locking*.

Na Figura 14 é ilustrado o comportamento do deslizamento na extremidade da laje em relação à carga aplicada. Nota-se que todas as análises numéricas apresentaram comportamento próximo ao real no início da fase de comportamento linear. Em termos de carga última, tanto a análise de Chen e Shi [25] quanto à análise que utiliza apenas o elemento plano de casca fino (Casca4) fornecem resultados próximos do experimental. No entanto, observa-se que na análise com o elemento plano de casca fino (Casca4) o comportamento da fase não linear é muito próximo ao comportamento real, o que não é verificado na análise numérica de Chen e Shi. Para a análise (Casca9+Casca4) cabem as mesmas considerações feitas para a curva carga-deslocamento da figura anterior.

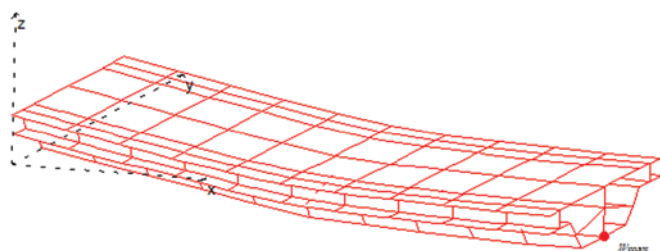


Figura 15
Deformada da laje mista

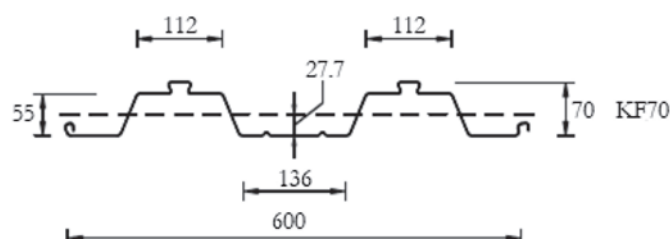


Figura 16
Forma de aço [10] (dimensões em mm)

Na Figura 15 está ilustrada a deformada da laje sendo indicado o ponto de máxima deflexão. Essa deformada foi obtida para a fase não linear da curva carga-deslocamento e observa-se uma maior curvatura da laje mista no ponto de aplicação da carga. Isso justifica o fato de alguns trabalhos adicionarem nesse ponto elementos (indutores de fissuração) que possam representar o comportamento do concreto após fissuração [7].

4.2 Exemplo 2: laje contínua

Nesse exemplo é analisada uma laje mista com dois vãos contínuos simétricos em termos de carregamento e condições de apoio. A forma de aço da laje mista é indicada na Figura 16. Essa mesma laje mista foi avaliada de forma numérica e experimental por Gholamhoseini *et al.* [10].

Armaduras de reforço transversais e longitudinais foram utilizadas na região de momento negativo. O carregamento é da forma como indicado para o ensaio de flexão. Nas Figuras 17 e 18 estão indicados, respectivamente, um detalhe das armaduras negativas e um esquema de um vão da laje contínua.

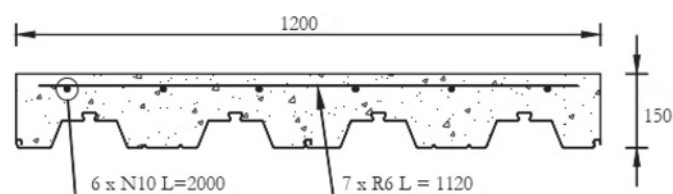


Figura 17
Detalhe da armadura negativa [10]
(dimensões em mm)

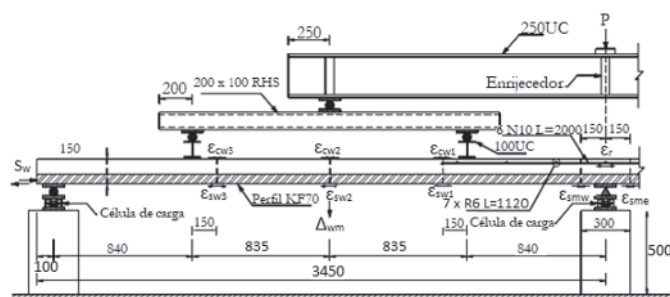


Figura 18
Esquema da laje contínua [10] (dimensões em mm)

Tabela 1

Dimensões da laje KF-70

Laje	Largura (m)	Comprimento total (m)	Espessura total (mm)	Vão (mm)	Vão de cisalhamento (mm)
KF-70	1,2	6,9	150	3350	$L/4 = 837,5$

Tabela 2

Propriedades dos materiais

Laje	f'_c (MPa)	E_c (MPa)	f_y (MPa)	E_s (GPa)	Espessura da fôrma (mm)
KF-70	47,9	33050	532	203	0,75

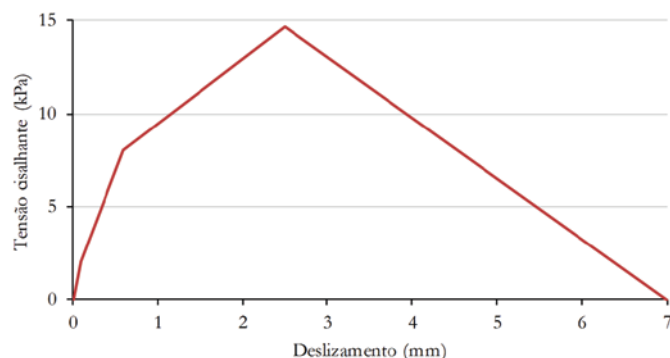
Na Tabela 1 estão apresentadas as dimensões e o vão de cisalhamento da laje avaliada nesse exemplo. São realizadas duas análises (casca4) e (casca9+casca4), as descrições dessas análises já foram feitas nos exemplos anteriores.

Assim como no exemplo anterior, a separação vertical e o deslizamento transversal são desconsiderados, já a conexão longitudinal é representada por uma curva tensão cisalhante versus deslizamento no contato aço-concreto da laje mista como apresentada na Figura 19. Essa curva foi determinada a partir da resposta experimental da curva carga-deslizamento da laje contínua fornecida por Gholamhoseini *et al.* [10].

Os materiais concreto e aço da fôrma são caracterizados pelas suas curvas tensão-deformação sendo para isso utilizados os valores indicados na Tabela 2. Para as barras de reforço a tensão de escoamento do aço é $f_y = 495$ MPa e o módulo de elasticidade $E_s = 205$ GPa.

Os resultados numéricos de Gholamhoseini *et al.* [10] foram obtidos com o programa ATENA 3D. A fôrma de aço e a laje de concreto foram modeladas com elementos sólidos tetraédricos, as barras de reforço foram modeladas como barras discretas dentro da laje de concreto, e a conexão entre o aço e o concreto foi simulada através de um material de interface que é baseado no critério de falha de Mohr-Coulomb. Nas Figuras 20 e 21 são apresentados os resultados numéricos obtidos nesse trabalho e os resultados numérico e experimental de Gholamhoseini.

Nas Figuras 20 e 21 são apresentadas, respectivamente, as curvas carga-deslocamento e carga-deslizamento da laje mista. Observa-se que as análises numéricas forneceram uma boa apro-

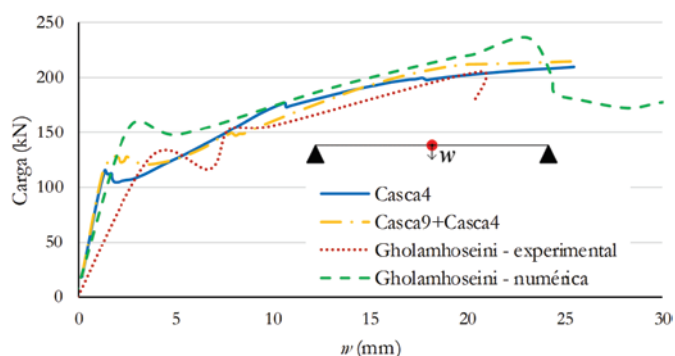
**Figura 19**

Curva tensão cisalhante x deslizamento

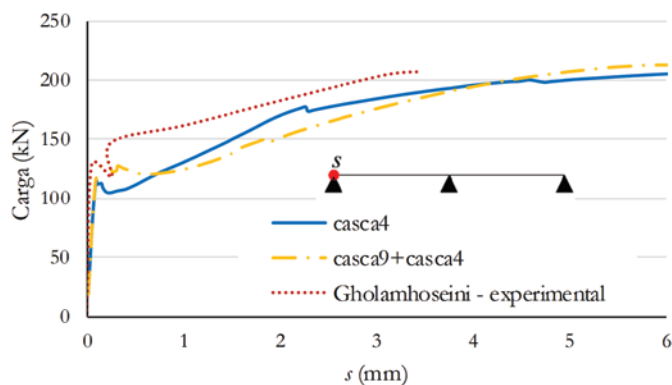
ximação com a análise experimental. Na Figura 21 não é apresentada a análise numérica de Gholamhoseini por não ter sido fornecida pelo autor.

4.3 Exemplo 3: laje com forma reentrante

Assim como as fôrmas de aço trapezoidais, as fôrmas de aço reentrantes são bastante empregadas em lajes mistas. Nesse caso não são utilizadas mossas, pois a geometria da fôrma gera um efeito de confinamento do concreto, que contribui para a

**Figura 20**

Curva carga x deflexão no meio do vão

**Figura 21**

Curva carga x deslizamento na extremidade para a laje contínua

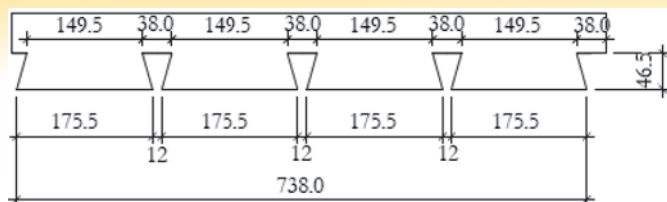


Figura 22
Geometria da fôrma [9] (dimensões em mm)

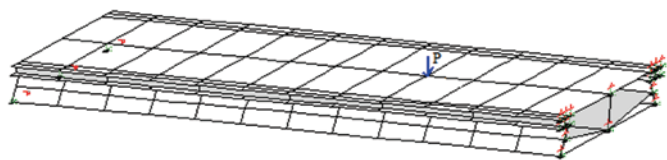


Figura 23
Discretização da laje P1-2

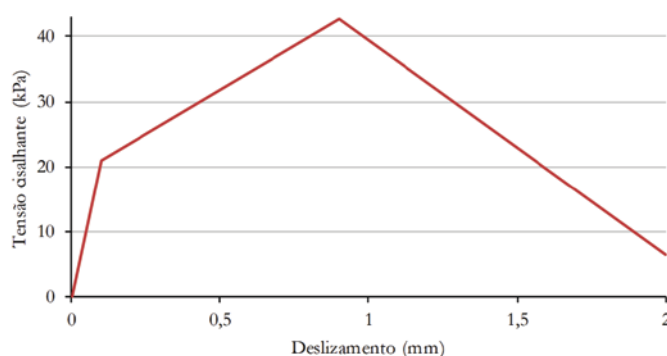


Figura 24
Curva tensão cisalhante x deslizamento

resistência ao cisalhamento na interface aço-concreto. Nesse exemplo é feita a modelagem de duas lajes mistas com a fôrma de aço reentrante indicada na Figura 22. As lajes em questão foram estudadas experimentalmente por Marciukaitis *et al.* [32] e avaliadas numericamente por Chen e Shi [9].

Na Tabela 3 estão apresentadas as dimensões e o vão de cisalhamento das lajes avaliadas nesse exemplo. As lajes possuem duas cargas aplicadas simetricamente conforme o ensaio de flexão (Figura 1). São realizadas duas análises (casca4) e (casca9+casca4), as descrições dessas análises já foram feitas nos exemplos anteriores.

Tabela 3
Dados das lajes

Laje	Vão (m)	Largura (m)	Espessura da fôrma de aço (mm)	Espessura total do concreto (mm)	Vão de cisalhamento (m)
P1-2	1,8	0,77	0,9	75	0,6
P2-2	1,8	0,77	0,9	98	0,6

Tabela 4
Dados dos materiais

Laje	f_y (MPa)	E_s (GPa)	ν_s	f_c (MPa)	E_c (GPa)	ν_c
P1-2	317	205	0,3	21,6	40,5	0,2
P2-2	317	205	0,3	28,6	41,5	0,2

Na Figura 23 é apresentada a discretização da laje P1-2. Como pode ser observado nessa discretização e nos outros exemplos, o elemento de barra que representa o concreto na nervura não é localizado no centro geométrico de sua seção transversal. Isso porque, o elemento de interface que faz a ligação entre o elemento de barra e o elemento plano de casca deve formar um ângulo de 90° como o plano de deslizamento, que nesses exemplos, é paralelo ao elemento plano de casca. Nessa figura também são apresentadas as condições de apoio e a posição de aplicação da carga. Os três nós da extremidade esquerda que estão marcados, tem os deslocamentos de translação ao longo do eixo x e rotação em y liberados e os nós da extremidade direita tem apenas a translação em z livre.

Assim como nos exemplos anteriores foram desconsideradas as possibilidades de separação vertical e deslizamento transversal. Para a conexão na direção longitudinal é utilizada a curva tensão de cisalhamento versus deslizamento longitudinal dada na Figura 24. Essa curva foi obtida de forma semelhante à sugerida por Marciukaitis *et al.* [32]. As propriedades dos materiais são apresentadas na Tabela 4. Os resultados numéricos de Chen e Shi [9] foram obtidos com o programa comercial ANSYS. A fôrma de aço foi discretizada com elementos planos de casca, a laje de concreto com elementos sólidos e a conexão foi modelada por um par de elementos de contato, permitindo apenas o deslizamento longitudinal. Nas Figuras 25 e 26 são ilustrados os resultados numéricos obtidos nesse trabalho, o resultado numérico de Chen e Shi [9], e o resultado do modelo experimental apresentado por Marciukaitis *et al.* [32]. Observa-se das Figuras 25 e 26 que nas duas análises o comportamento obtido para os modelos numéricos implementados nesse trabalho foi próximo ao comportamento do modelo experimental.

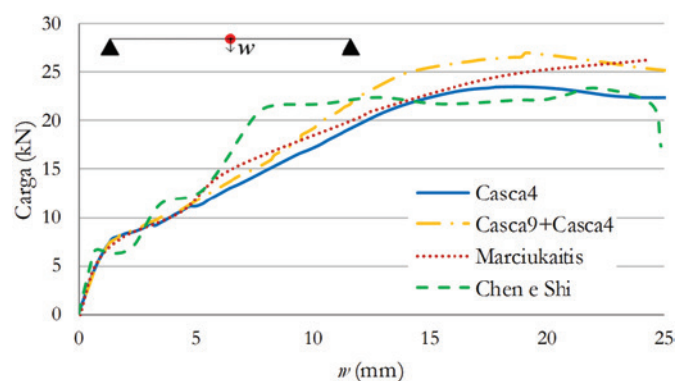


Figura 25
Carga x Deflexão no meio do vão

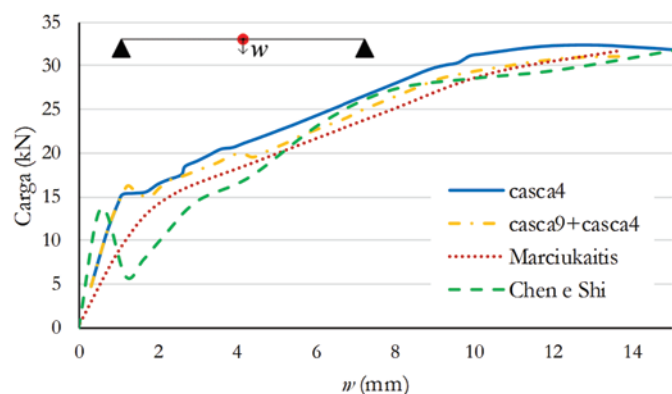


Figura 26

Laje P2-2 – Carga x Deflexão no meio do vão

De forma geral, os modelos numéricos desenvolvidos nesse trabalho apresentaram resultados que representam melhor o comportamento carga-deflexão para a laje P1-2 e P2-2 que o modelo numérico de referência.

5. Conclusões

Neste artigo é sugerido um modelo de análise e elementos finitos para análise numérica não linear de lajes mistas submetidas à sua capacidade última. Nesse modelo sugerido a laje de concreto acima das nervuras é simulada por elementos finitos planos de casca considerando o comportamento ortotrópico do concreto após a fissuração e do aço após o escoamento. A conexão deformável entre a forma de aço e o concreto é modelada com elementos de interface e as nervuras da laje mista são modeladas com elementos de barra. A eficiência do modelo utilizado, bem como dos elementos finitos apresentados para simulação numérica de lajes mistas foi devidamente comprovada com resultados obtidos em exemplos numéricos e experimentais encontrados na literatura. O modelo numérico sugerido permite a obtenção das cargas máximas suportadas pelas lajes mistas com a vantagem de apresentar menor custo computacional comparada àquela que utiliza de discretização tridimensional da parte de concreto da laje mista. Como observado nos exemplos o elemento de casca espesso pode gerar erros numéricos em algumas análises sendo, dessa forma, sugerida a simulação da laje de concreto acima da nervura por elementos de casca fino.

6. Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer a Universidade Federal de Ouro Preto/PROPEC, FAPEMIG, CNPq, e a CAPES, pelo apoio financeiro.

7. Referências bibliográficas

- [1] VELJKOVIC M. Behaviour and resistance of composite slabs – Experiments and finite element analysis, Suécia, 1996, Tese (Doutorado) - Department of Steel Structures, Lulea University of Technology, 181p.
- [2] CAMPOS P.C. Efeito da continuidade no comportamento e na resistência de lajes mistas com fôrma de aço incorporada, Belo Horizonte, 2001, Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, 136p.
- [3] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios. - NBR 8800, Rio de Janeiro, 2008.
- [4] COMITE EUROPÉEN DE NORMALISATION. Design of composite steel and concrete structures. Part 1: General rules and rules for buildings. - EUROCODE 4, 2004.
- [5] MARIMUTHU V., SEETHARAMAN S., JAYACHANDRAN S.A., CHELLAPPAN A., BANDYOPADHYAY T.K., DUTTA D. Experimental studies on composite deck slabs to determine the shear bond characteristic ($m-k$) values of the embosse profiled sheet. Journal of Constructional Steel Research, v. 63, 2006; p.791-803.
- [6] ABDULLAH R., EASTERLING W.S. Determination of composite slab strength using a new elemental test method. Journal of Structural Engineering, v. 133, n. 9, 2007; p. 1268-1277.
- [7] RÍOS J.D., CIFUENTES H., CONCHA A.M., REGUERA F.M. Numerical modelling of the shear-bond behaviour of composite slabs in four and six-point bending tests. Engineering Structures, v. 133, 2017; p. 91-104.
- [8] ABDULLAH R., EASTERLING W.S. New evaluation and modeling procedure for horizontal shear bond in composite slabs. Journal of Constructional Steel Research, v. 65, 2009; p. 891-899.
- [9] CHEN S., SHI X. Shear bond mechanism of composite slabs – A universal FE approach. Journal of Constructional Steel Research, v. 67, 2011; p. 1475-1484.
- [10] GHOLAMHOSEINI A., GILBERT I., BRADFORD M. Longitudinal shear stress and bond-slip relationships in composite concrete slabs. Engineering Structures, v. 69, 2014; p. 37-48.
- [11] MAJDI Y., HSU C.T., ZAREI M. Finite element analysis of new composite floors having cold-formed steel and concrete slab. Engineering Structures, v. 77, 2014; p. 65-83.
- [12] BRADFORD M.A. Generic modelling of composite steel-concrete slabs subjected to shrinkage, creep and thermal strains including partial interaction. Engineering Structures, v. 32, 2010; p. 1459-1465.
- [13] FERRER M., MARIMON F., CASAFONT M. An experimental investigation of a new perfect bond technology for composite slabs. Construction and Building Materials, v. 166, 2018; p. 618-633.
- [14] YU X., HUANG Z., BURGESS I., PLANK R. Nonlinear analysis of orthotropic composite slabs in fire. Engineering Structures, v. 30, 2007, p. 67-80.
- [15] TENG X., ZHANG Y. X., LIN X. Two new composite plate elements with bond-slip effect for nonlinear finite element analyses of FRP-strengthened concrete slabs. Computers and Structures, v. 148, 2014; p. 35-44.
- [16] TENG X., ZHANG Y.X. Nonlinear finite element analyses of FRP-strengthened reinforced concrete slabs using a new layered composite plate element. Composite Structures, v. 114, 2014; p. 20-29.
- [17] HUANG Z., BURGESS I.W., PLANK R.J. Modelling membrane action of concrete slabs in composite buildings in fire.

- Part I: Theoretical development. *Journal of Structural Engineering*, n. 8, v. 129, 2003; p. 1093-1102.
- [18] BATOZ J.L., BATHE J., HO L.H. A study of three-node triangular plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 15, 1980; p. 1771-1812.
 - [19] BATOZ J.L., TAHAR M.B. Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 18, 1982; p. 1655-1677.
 - [20] SARAWIT A.T., KIM Y., BAKKER. M.C.M., PEKOZ T. The finite element method for thin-walled members-applications. *Thin-Walled Structures*, v. 41, 2003; p. 191-206.
 - [21] RAZAQPUR A.G., NOFAL M., VASILESCU A. An improved quadrilateral finite element for analysis of thin plates. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 40, 2002, p. 1-23.
 - [22] DANIELS B.J., CRISINEL M. Composite slab behavior and strength analysis. Part 1: Calculation procedure. *Journal of Structural Engineering*, v. 119, 1993; p. 16-35.
 - [23] CALIXTO J.M., BRENDOLAN G., PIMENTA R. Estudo comparativo dos critérios de dimensionamento ao cisalhamento longitudinal em lajes mistas de aço e concreto. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v. 2, n. 2, 2009; p. 124-141.
 - [24] FERRER M., MARIMON F., CRISINEL M. Designing cold-formed steel sheets for composite slabs: An experimentally validated FEM approach to slip failure mechanics. *Thin-Walled Structures*, v. 44, 2007; p. 1261-1271.
 - [25] CHEN S. Load carrying capacity of composite slabs with various end constraints. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 59, 2003; p. 385-403.
 - [26] RANA M.M., UY B., MIRZA O. Experimental and numerical study of end anchorage in composite slabs. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 115, 2015; p. 372-386.
 - [27] DEGTYAREV V.V. Strength of composite slabs with end anchorages. Part 1: Analytical model. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 94, 2013; p. 150-162.
 - [28] SILVA A.R. Análise numérica de elementos estruturais com interação parcial, Ouro Preto, 2010, Tese (Doutorado) - Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto.
 - [29] SILVA A.R., DIAS L.E.S. An interface element for numerical analysis of flat plate/shell elements with deformable connection, *Latin American Journal of Solid Structures*, v.15, n.2, 2018; p.1-16.
 - [30] INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE. Fip Bulletin 55: Model Code 2010, First complete draft. CEB/FIP MODEL CODE. Volume 1. 2010.
 - [31] ROTS J.G., KUSTERS G.M.A, BLAAUWENDRAAD J. The need for fracture mechanics options in finite element models for concrete structures. In: *Int. Conf. On Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, 1984, F. Damanjanic *et al.*, eds., Pineridge Press, Part 1, 19-32.
 - [32] MARCIUKAITIS G., JONAITIS B., VALIVONIS J. Analysis of deflections of composite slabs with profiled sheeting up to the ultimate moment. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 62, 2006; p.820-830.